

2024 年第十四届 MathorCup 数学应用挑战赛题目

D 题 量子计算在矿山设备配置及运营中的建模应用

随着智能技术的发展，智慧矿山的概念越来越受到重视。越来越多的设备供应商正在向智慧矿山整体解决方案供应商转型，是否具备提供整体解决方案的能力，也逐步成为众多矿山设备企业的核心竞争力。智慧矿山依靠先进的信息技术和设备自动化，实现矿山开采的高效、安全、环保和智能化。在智慧矿山的运营过程中，如何根据给定的工作量、机型斗容、效率、油耗和价格等因素，设计出一套最优的设备配置及运营方案，包括合理采购、分配和使用挖掘机、矿车等重要资源，是提高竞争力的关键。

QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization, 二次无约束二值优化) 模型是一种适配相干伊辛机 (Coherent Ising Machine, CIM) 的模型，其形式为 $\min \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, 其中 \mathbf{Q} 为 $n \times n$ 矩阵。本赛题主要基于智慧矿山设备配置及运营方案设计的场景，通过将问题建模为 QUBO 形式，使用 Kaiwu SDK 完成对问题的求解。Kaiwu SDK 是一套基于相干伊辛机求解 QUBO 模型的软件开发套件，可以访问 [本链接](https://developer.qboson.com/sdkDownload) (<https://developer.qboson.com/sdkDownload>) 来获取 Kaiwu SDK。附件中提供了 QUBO 建模的参考资料(附件 1)以及相关的应用案例论文(附件 2，附件 3)。

假定你们是智慧矿山项目团队，负责为一家即将投入运营的智慧矿山设计一个综合的设备配置与运营方案，该方案需考虑因素：

- 挖掘机斗容：不同类型挖掘机的斗容大小（立方米）

- 挖掘机作业效率：各型号挖掘机作业效率（斗/小时）
- 矿车装载量：各型号矿车的装载量（立方米）
- 油耗：各型号挖掘机和矿卡设备的油耗（升/小时）
- 价格：各型号挖掘机和矿车设备的购买（万元）
- 人工成本：操作每台挖掘机和矿车的工资、补贴等人工成本（元/月）
- 维护成本：设备的月维护成本（元/月）

假设该项目规模及其设备的数据如下：

启动资金 2400 万元，计划开采 5 年。

可选挖掘机有 4 种，设备参数如下表格 1 所示：

表 1：四种挖掘机的参数表

型号	斗容	作业效率	油耗	采购价格	人工成本	维护成本
挖 1	0.9	190	28	100	7000	1000
挖 2	1.2	175	30	140	7500	1500
挖 3	1.8	165	34	200	8500	2000
挖 4	2.1	150	38	320	9000	3000

已购买以下 3 种类型的矿车，每种类型的矿车数量分别为 7 辆、7 辆和 3 辆，设备参数如表 2 所示：

表 2：三种矿车的参数表

型号	油耗	人工成本	维护成本
矿 1	18	6000	2000
矿 2	22	7000	3000
矿 3	27	8000	4000

挖掘机和矿车按照每月工作 20 天，每天工作 8 小时，油价 7 元/升。

矿石价格为 20 元/立方米。

现实中需要考虑如下约束：

- 1、在实际作业中，挖掘机与矿车的匹配存在一定约束：
 - 由于挖掘机铲斗宽度和矿车宽度的对应关系，大型号的挖掘机无法

匹配小型号的矿车；

- 为避免装车效率太慢，小型号的挖掘机也不会匹配太大型号的矿车；

不同型号的挖掘机与矿车的匹配关系如表 3 所示：

表 3 挖掘机和矿车的匹配关系表

	矿 1	矿 2	矿 3
挖 1	1	\	\
挖 2	2	1	\
挖 3	2	2	1
挖 4	\	2	1

例如对于一台挖掘机 2 来讲，至少需要两辆矿车 1 或者一辆矿车 2 才能保证作业稳定进行。

2、矿山在实际运营中，需要小型挖掘机兼顾进行修路、搭台、处理边角料等维护作业；同时为保证整体的作业效率，需要一定数量的大型挖掘机。可以归结为：整体包含的挖掘机型号不能少于 3 种。

3、智慧矿山系统运营过程中的效率按照如下规则计算：

- 假如挖掘机与矿车的匹配关系恰好时（等于表格内数值），或者给挖掘机分配的矿车数量多于表格内数值时，每日作业量以挖掘机效率为准；

- 假如给挖掘机分配的矿车数量少，则挖掘机会有部分时间处于等待矿车的状态，则每日作业量为挖掘机效率乘以相应的比例。比如，某挖掘机标准匹配 2 台矿车，而只安排了 1 台，则该挖掘机每天的作业量为标准作业量的 1/2。

4、设定以下假设条件：

- 为简化管理和调度的复杂性，降低因更改匹配而导致的安全事故风险，假设挖掘机和矿车匹配关系是固定不变的；

- 假设同一型号挖掘机只能匹配同一型号的矿车；
- 只需要第一年花费挖掘机的采购费用。

基于以上场景与给出的数据，你们团队需要完成如下任务：

问题 1：假设不考虑挖掘机的使用寿命，表格 4 中给出了对于每种类型的挖掘机能够带来的长期利润的折现值的估计。请对这个简化的场景建立 QUBO 模型，求解给出在预算范围内最大化总利润的采购方案，即需要采购的挖掘机型号和对应的数量。分别使用 Kaiwu SDK 内置的模拟退火求解器和 CIM 模拟器对模型进行求解。

表 4：长期利润折现表（单位：万元）

型号	挖 1	挖 2	挖 3	挖 4
长期利润折现值	2000	3000	5000	6000

问题 2：假设挖掘机和矿车的使用寿命为 5 年，根据上述因素，建立一个 QUBO 模型，规划需要采购的挖掘机型号和数量，并给出挖掘机和矿车之间的匹配关系，使得 5 年内的总利润最大化（利润=收益-各种成本）。QUBO 模型的求解使用 Kaiwu SDK 的模拟退火求解器和 CIM 模拟器进行，请尽量减少量子比特的数量（SDK 仅支持 100 比特以内的问题求解）。当模型比特数超出 SDK 限制时，请尝试思考创新性的求解方案。

问题 3：考虑在问题 2 的场景中，当已购买 10 种类型的矿车（参数参考表 5），可选的挖掘机类型为 10（参数参考表 6），整体包含的挖掘机型号不能少于 5 种，挖掘机和矿车的匹配关系如表 7 所示，启动资金为 4000 万元时，建立 QUBO 模型并使用 Kaiwu SDK 求解最优的采购方案，并给出挖掘机和矿车之间的匹配关系（提示：当建立的 QUBO 模型比特数较高

时，可以尝试例如 subQUBO 等方法对问题进行求解。subQUBO 方法是一种通过量子计算和经典计算结合的方法。通过每次提取一个 QUBO 的子问题，即 subQUBO，求解 subQUBO 得到解后更新原问题的解，通过多次求解 subQUBO 来求解原问题，详见参考附件 4)。

表 5：十种矿车的参数表

型号	油耗	人工成本	维护成本	已购数量
矿 1	15	5000	1000	5
矿 2	18	6000	2000	5
矿 3	22	7000	3000	5
矿 4	27	8000	4000	5
矿 5	33	9000	5000	5
矿 6	40	10000	6000	3
矿 7	50	11000	7000	3
矿 8	55	12000	8000	3
矿 9	64	13000	9000	3
矿 10	70	15000	10000	3

表 6：十种挖掘机的参数表

型号	斗容	作业效率	油耗	采购价格	人工成本	维护成本
挖 1	0.9	190	28	100	7000	1000
挖 2	1.2	175	30	140	7500	1500
挖 3	1.8	165	34	200	8500	2000
挖 4	2.1	150	38	320	9000	3000
挖 5	2.6	140	42	440	10000	5000
挖 6	3.5	130	50	500	12000	8000
挖 7	5	120	60	640	13000	10000
挖 8	6	110	75	760	16000	13000
挖 9	8	105	90	860	18000	15000
挖 10	10	100	100	1000	20000	18000

表 7：十种挖掘机和矿车匹配关系表

	矿 1	矿 2	矿 3	矿 4	矿 5	矿 6	矿 7	矿 8	矿 9	矿 10
挖 1	3	3	2	\	\	\	\	\	\	\
挖 2	3	3	3	2	\	\	\	\	\	\
挖 3	4	3	3	3	2	\	\	\	\	\
挖 4	5	4	3	3	3	2	\	\	\	\
挖 5	\	5	4	3	3	3	2	2	\	\
挖 6	\	\	5	4	3	3	3	2	2	\
挖 7	\	\	5	5	4	3	3	3	2	2
挖 8	\	\	\	5	5	4	3	3	3	3
挖 9	\	\	\	\	5	5	4	3	3	3
挖 10	\	\	\	\	\	5	5	4	3	3

问题 4： 请举例一个潜在可以通过构建合适的 QUBO 模型进行决策优化应用场景。这个场景应该具有实际应用意义，有潜力进行规模化应用，并且能够展示量子计算的优势。描述应该包括必要的背景信息、研究方法、思路以及预期结果，并提供技术路线图，QUBO 模型表达式和相关参考文献。